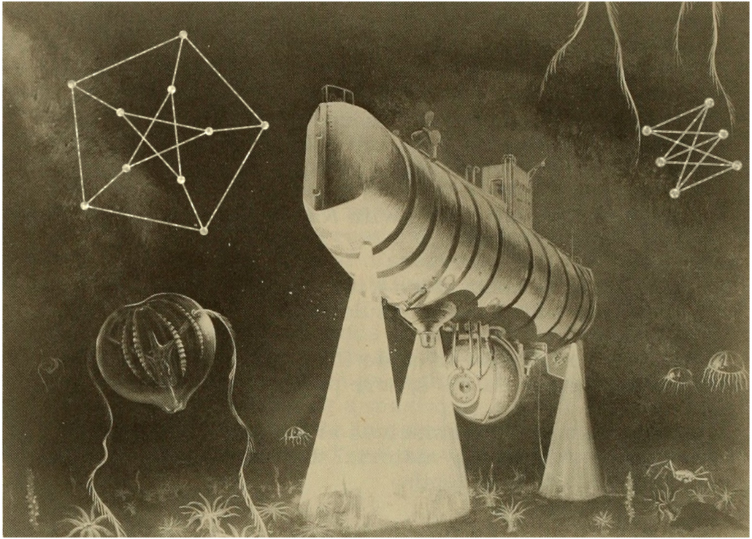
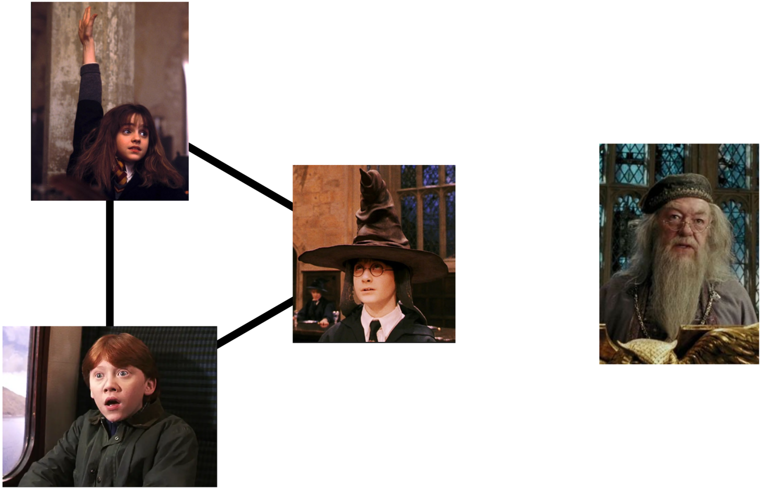
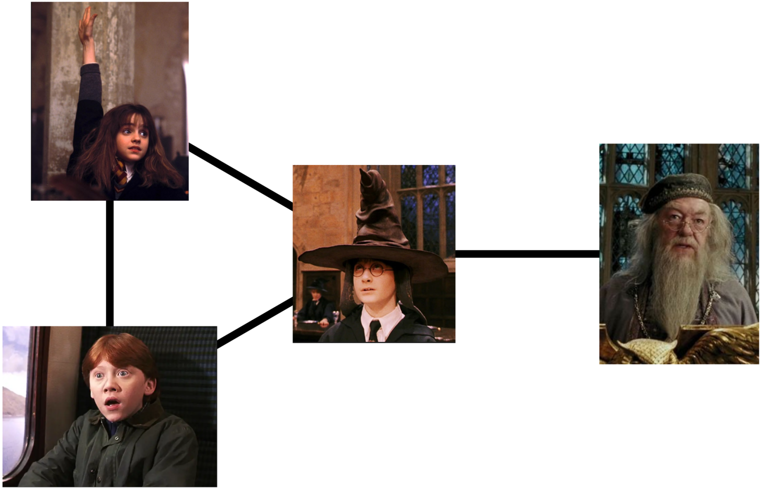
Eine kombinatorische Reise zum Challenger Deep der Mathematik

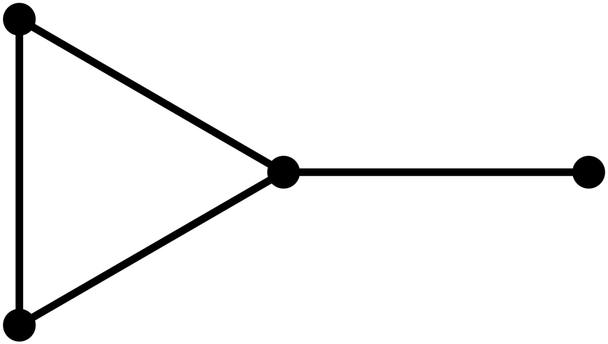
Jan Kurkofka



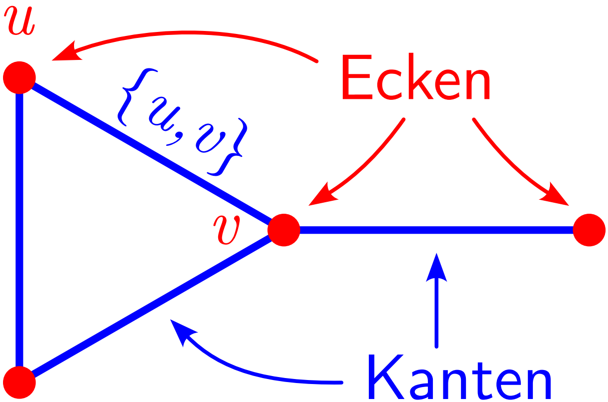
Soziale Netzwerke



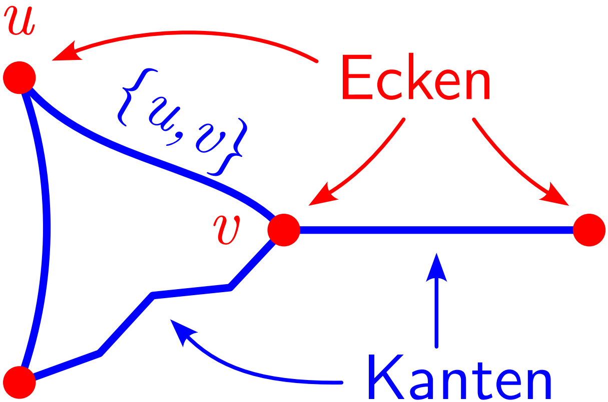




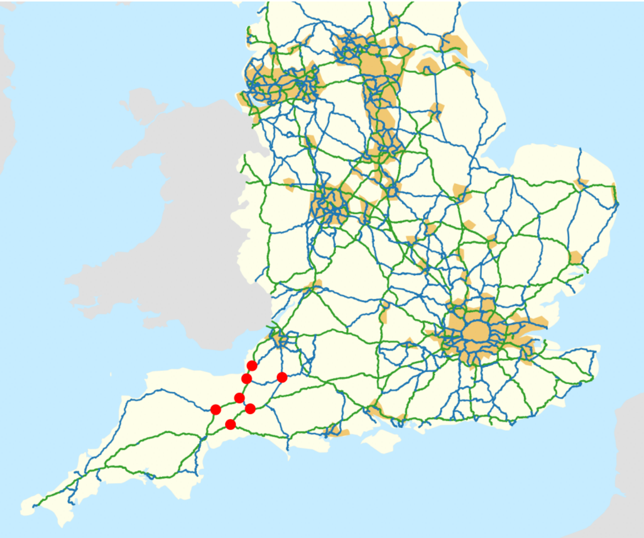
Graph



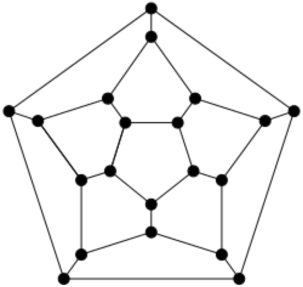
Graph



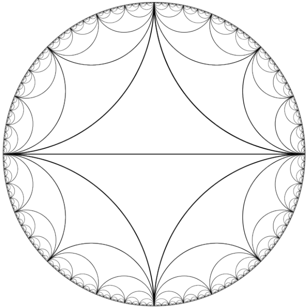
Infrastruktur



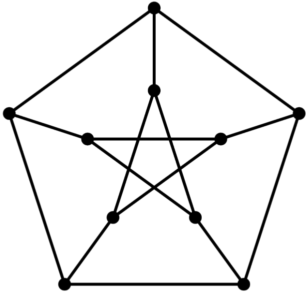
Mathe!



Dodekaeder

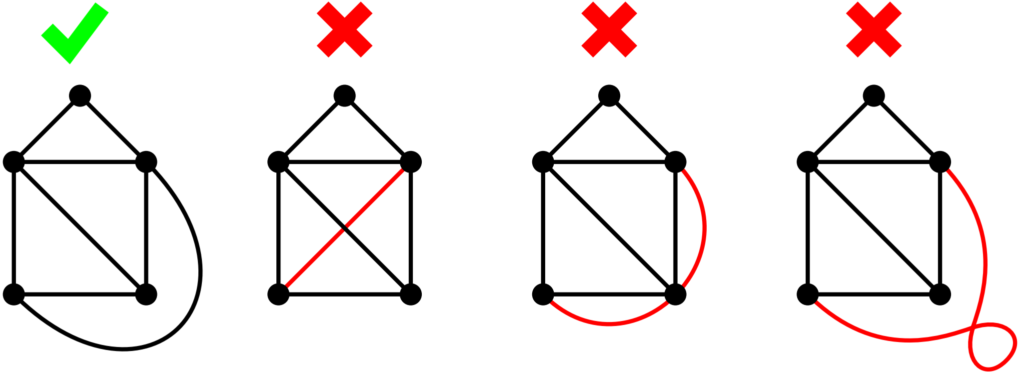


Farey-Graph



Petersen-Graph

Welche Graphen $\underbrace{\text{lassen sich in der Ebene zeichnen sodass keine Kanten kreuzen}}_{\textit{sind planar}}$?

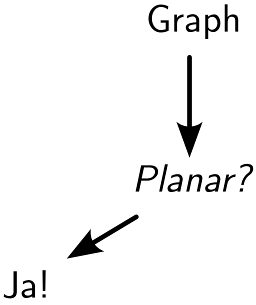


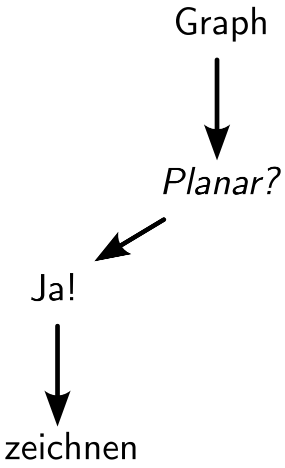
Graph

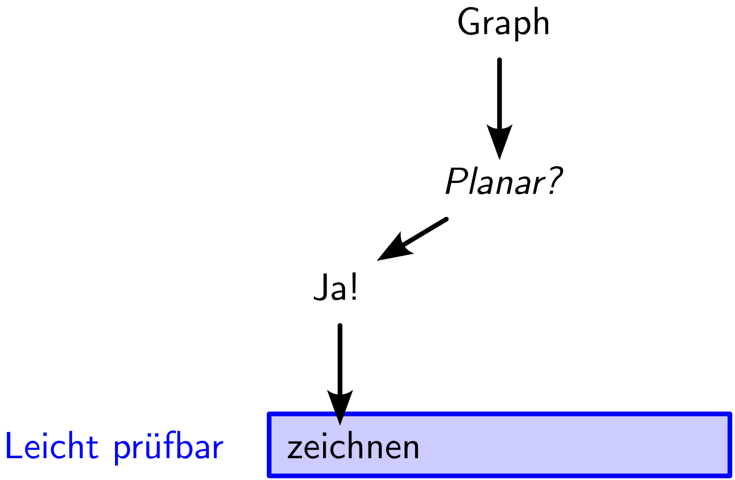
Graph

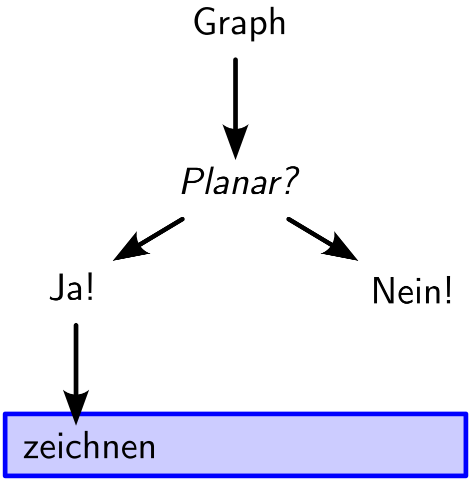
$\downarrow$

Planar?

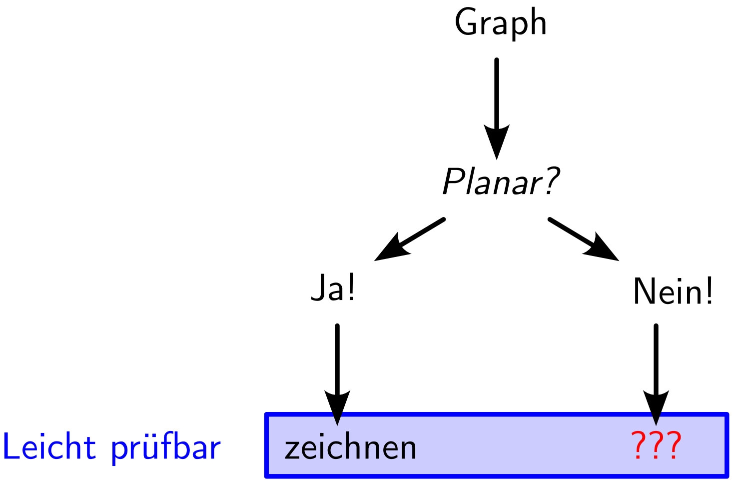

Graph
Planar?
Ja!


Graph
Planar?
Ja!
zeichnen


Graph
Planar?
Ja!
Leicht prüfbar
zeichnen



Leicht prüfbar


Graph
Planar?
Ja!
Nein!
Leicht prüfbar
zeichnen
???

Finde einen nicht-planaren Graphen

Finde einen nicht-planaren Graphen

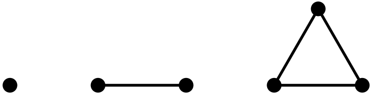
K_1

Finde einen nicht-planaren Graphen

K_1

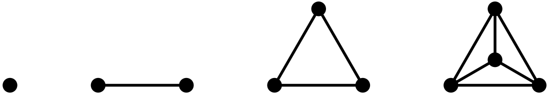
K_2

Finde einen nicht-planaren Graphen



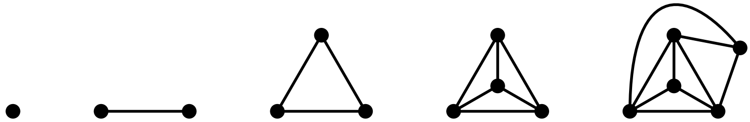
K_1 K_2 K_3

Finde einen nicht-planaren Graphen



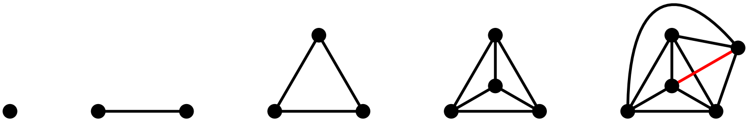
K_1 K_2 K_3 K_4

Finde einen nicht-planaren Graphen



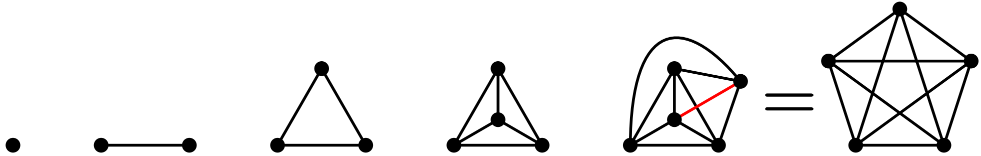
K_1 K_2 K_3 K_4

Finde einen nicht-planaren Graphen



K_1 K_2 K_3 K_4

Finde einen nicht-planaren Graphen



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

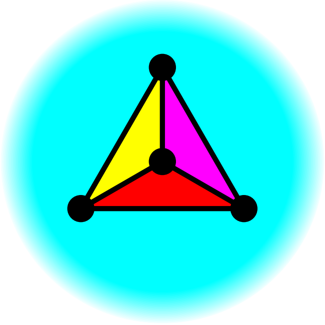
Euler's Formel (1752)

Jede planare Zeichnung eines zusammenhängenden Graphen mit n Ecken und m Kanten erfüllt

$$n - m + \ell = 2$$

wobei ℓ die Anzahl von Gebieten der Zeichnung ist.

Gebiet: zusammenhängende Region der Ebene nach Löschen der Zeichnung

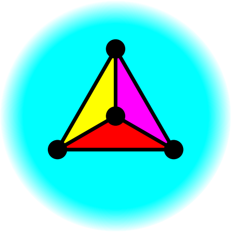


$$\begin{aligned} n &= 4 \\ m &= 6 \\ \ell &= 4 \end{aligned}$$

Euler's Formel (1752)

Jede planare Zeichnung eines zusammenhängenden Graphen mit n Ecken und m Kanten erfüllt

$$n - m + \ell = 2$$

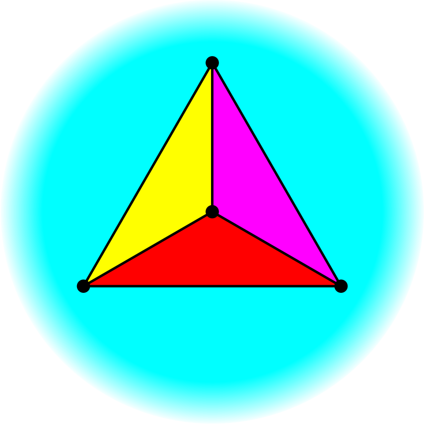


wobei ℓ die Anzahl von Gebieten der Zeichnung ist.

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

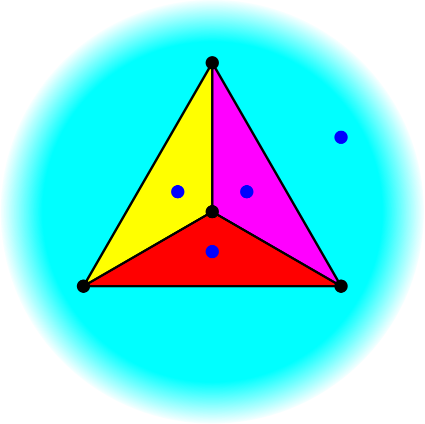
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



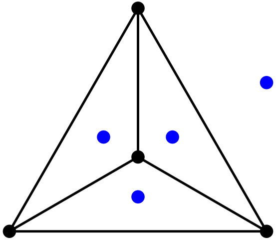
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Beweis.



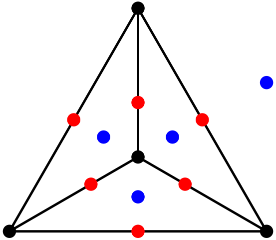
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Beweis.



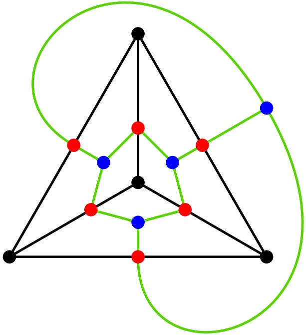
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Beweis.



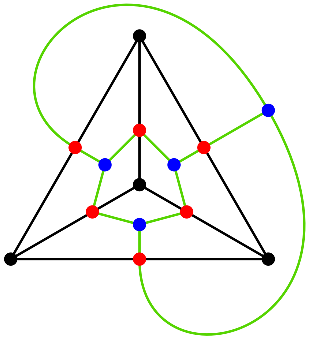
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

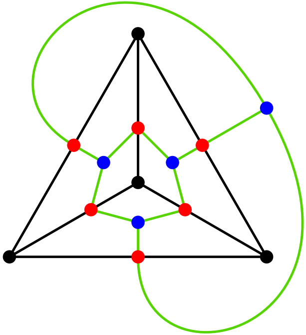
Beweis.



#grüne Kanten

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Beweis.



zwei Perspektiven

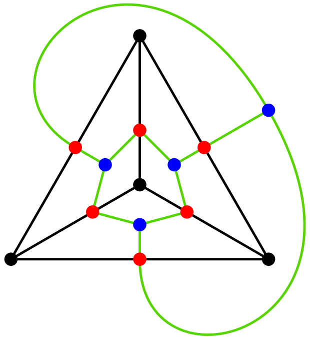
Gebiete

Kanten

#grüne Kanten

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



zwei Perspektiven

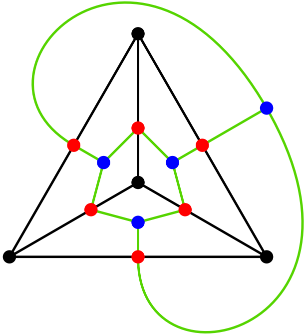
Gebiete

Kanten

$3\ell =$ #grüne Kanten

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Beweis.

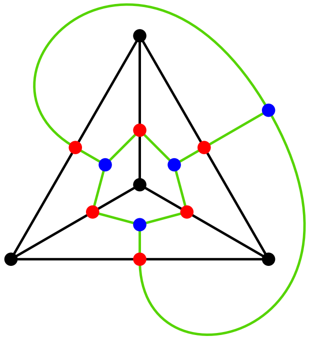


zwei Perspektiven

Gebiete		Kanten
$3\ell =$	#grüne Kanten	$= 2m$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



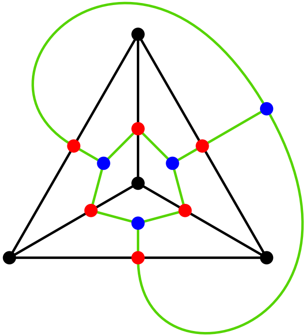
zwei Perspektiven

Gebiete		Kanten
$3\ell =$	#grüne Kanten	$= 2m$

$$\Longrightarrow \ell = \tfrac{2}{3}m \quad (*)$$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.

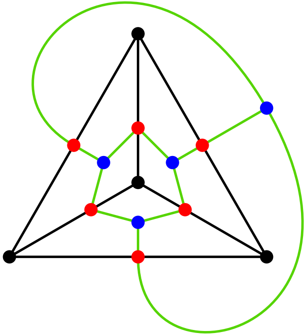


$$(*) \qquad \ell = \tfrac{2}{3}m$$

Euler's Formel: $\quad n - m + \ell = 2$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



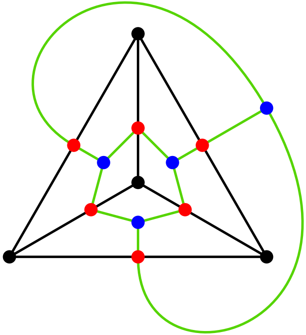
$$(*) \qquad \ell = \tfrac{2}{3}m$$

$$\text{Euler's Formel:} \qquad n - m + \ell = 2$$

$$\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \quad n - m + \tfrac{2}{3}m = 2$$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



$$(*) \qquad \ell = \tfrac{2}{3}m$$

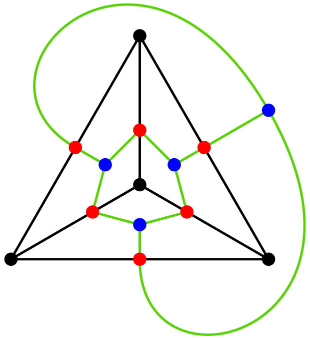
$$\text{Euler's Formel:} \qquad n - m + \ell = 2$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad n - m + \tfrac{2}{3}m = 2$$

$$\Longrightarrow \quad n - \tfrac{1}{3}m = 2$$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



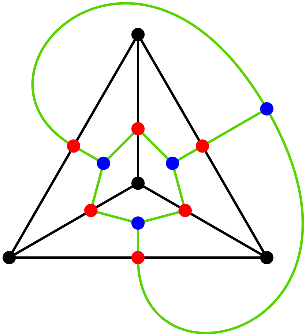
$$(*) \qquad \ell = \tfrac{2}{3}m$$

Euler's Formel:

$$\begin{aligned}
n - m + \ell &= 2\\
\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \quad n - m + \tfrac{2}{3}m &= 2\\
\Longrightarrow \quad n - \tfrac{1}{3}m &= 2\\
\Longrightarrow \quad n - 2 &= \tfrac{1}{3}m
\end{aligned}$$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.



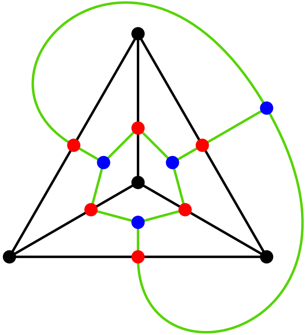
$$(*) \qquad \ell = \tfrac{2}{3}m$$

Euler's Formel:

$$\begin{aligned} n - m + \ell &= 2 \\ \overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad n - m + \tfrac{2}{3}m &= 2 \\ \Longrightarrow \quad n - \tfrac{1}{3}m &= 2 \\ \Longrightarrow \quad n - 2 &= \tfrac{1}{3}m \\ \Longrightarrow \quad 3n - 6 &= m \end{aligned}$$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Beweis.

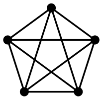


$$(*) \qquad \ell = \tfrac{2}{3}m$$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Euler's Formel:} & n - m + \ell & = & 2 \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow} & n - m + \frac{2}{3}m & = & 2 \\
\Longrightarrow & n - \frac{1}{3}m & = & 2 \\
\Longrightarrow & n - 2 & = & \frac{1}{3}m \\
\Longrightarrow & 3n - 6 & = & m
\end{array}$$

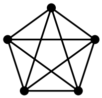
$\square$

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

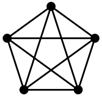
Beweis.

Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

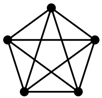
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

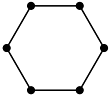
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

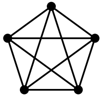
Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.



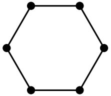
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

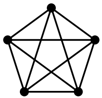
Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.



Die Zeichnung ist eine Triangulierung:

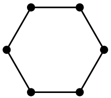
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

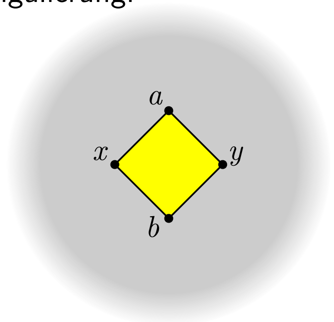
Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

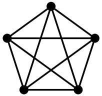
Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.



Die Zeichnung ist eine Triangulierung:



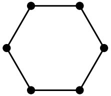
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

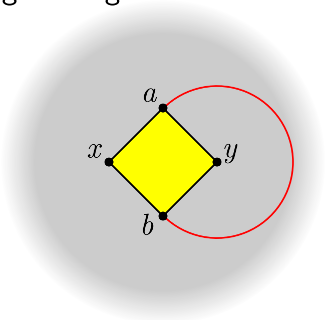
Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

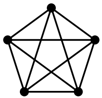
Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.



Die Zeichnung ist eine Triangulierung:



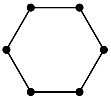
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

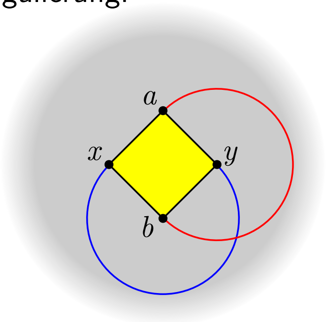
Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

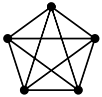
Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.



Die Zeichnung ist eine Triangulierung:



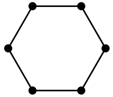
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

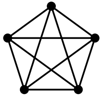
Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.



Die Zeichnung ist eine Triangulierung.

Korollar A sagt: K_5 hat $3n-6=3\cdot 5-6=9$ Kanten.

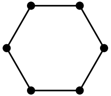
Korollar A. Jede Triangulierung der Ebene mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.

Korollar B. K_5  ist nicht planar.

Beweis. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass K_5 planar ist.

Wir zeichnen K_5 in der Ebene ohne Kreuzungen.

Ohne Details: jedes Gebiet ist durch einen Kreis berandet.

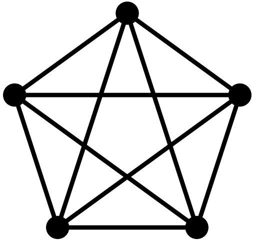


Die Zeichnung ist eine Triangulierung.

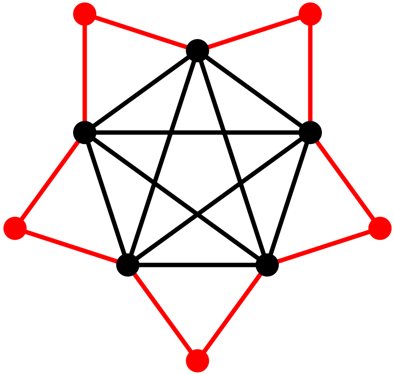
Korollar A sagt: K_5 hat $3n-6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ Kanten.

Aber K_5 hat $\binom{5}{2} = 10$ Kanten, Widerspruch. $\square$

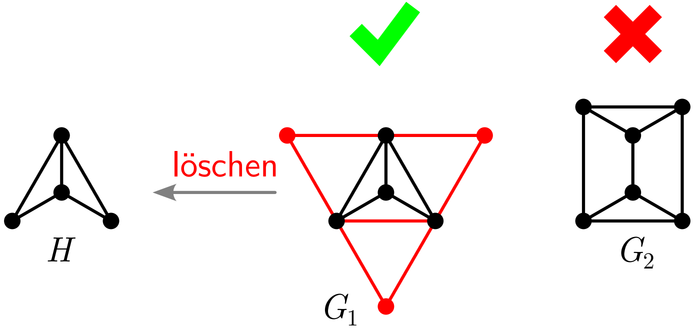
K_5 ist nicht planar. Gibt es noch andere nicht-planare Graphen?



K_5 ist nicht planar. Gibt es noch andere nicht-planare Graphen? Ja!

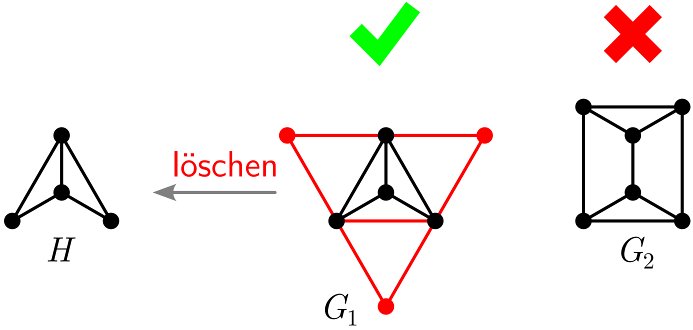


Ein Graph H ist ein *Teilgraph* eines Graphen G, wenn man H aus G durch schrittweises Löschen von Kanten oder isolierten Ecken erhalten kann.



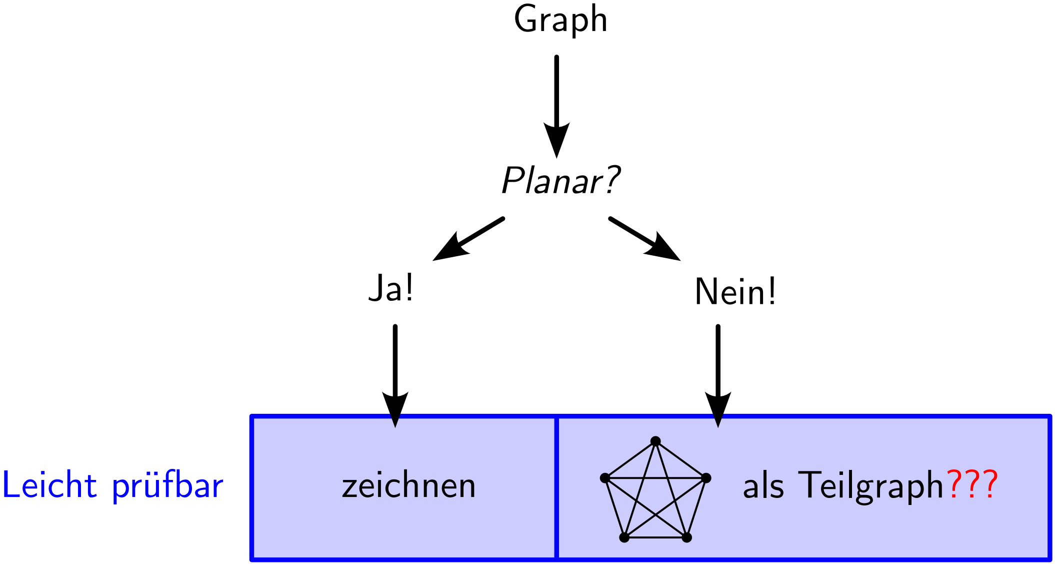
Fakt. Teilgraphen von planaren Graphen sind planar.

Ein Graph H ist ein *Teilgraph* eines Graphen G, wenn man H aus G durch schrittweises Löschen von Kanten oder isolierten Ecken erhalten kann.



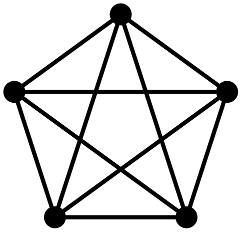
Fakt. Teilgraphen von planaren Graphen sind planar.

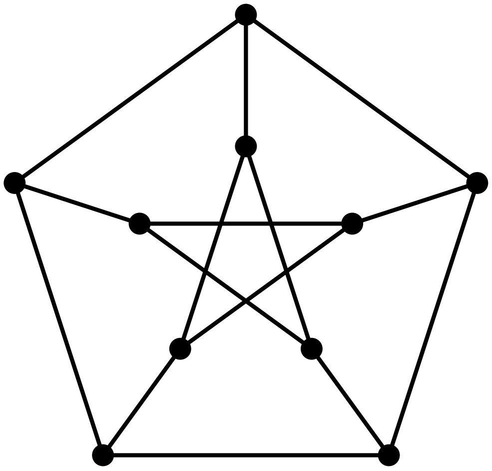
Vermutung. Jeder nicht-planare Graph enthält K_5 als Teilgraph.


Graph
Planar?
Ja!
Nein!
Leicht prüfbar
zeichnen
als Teilgraph???

Ist der rechte Graph planar?

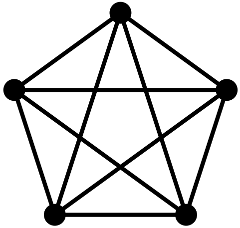
Enthält der rechte Graph einen K_5-Teilgraph?

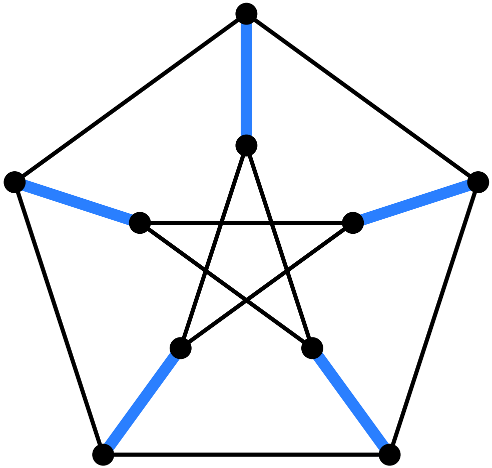




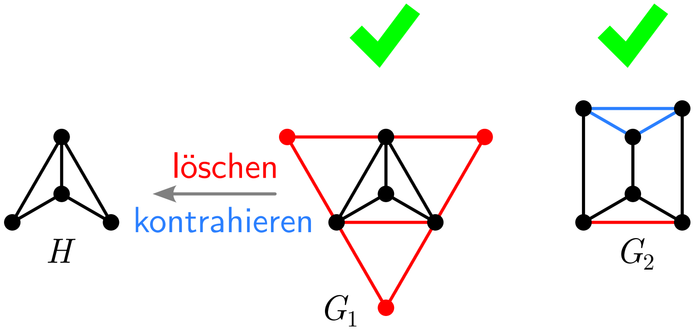
Ist der rechte Graph planar?

Enthält der rechte Graph einen K_5-Teilgraph?





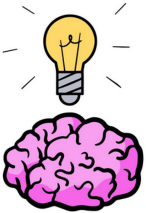
Ein Graph H ist ein *Minor* eines Graphen G wenn man H aus G durch schrittweises Löschen von Kanten oder isolierten Ecken oder durch Kontraktion von Kanten erhalten kann.



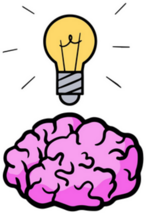
Fakt. Minoren von planaren Graphen sind planar.

Vermutung. Jeder nicht-planare Graph enthält K_5 als Minor.

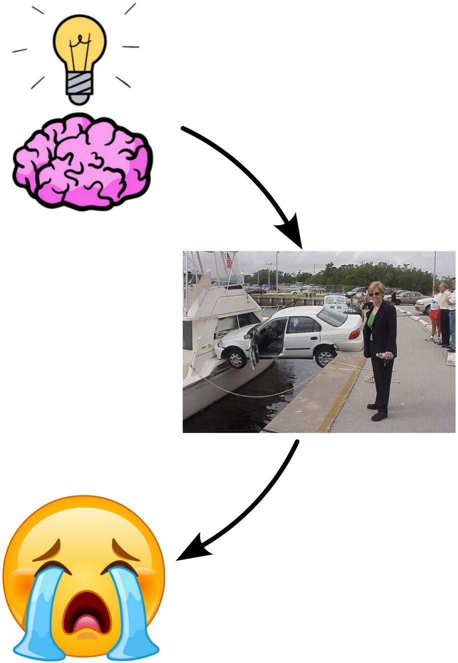
Leben als Mathematiker



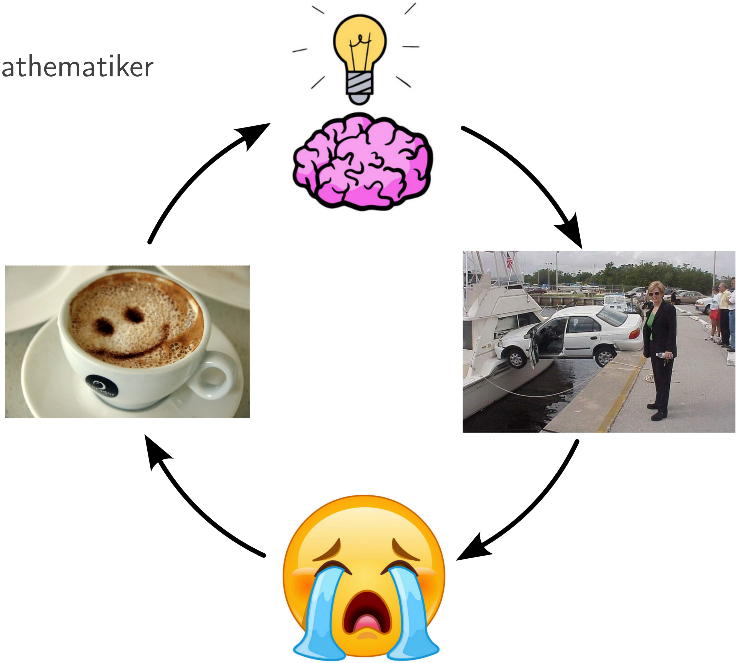
Leben als Mathematiker



Leben als Mathematiker



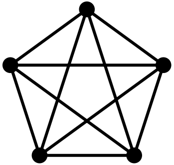
Leben als Mathematiker



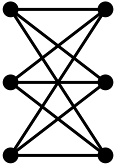
Satz von Kuratowski (1930)

Für jeden Graphen G gilt:

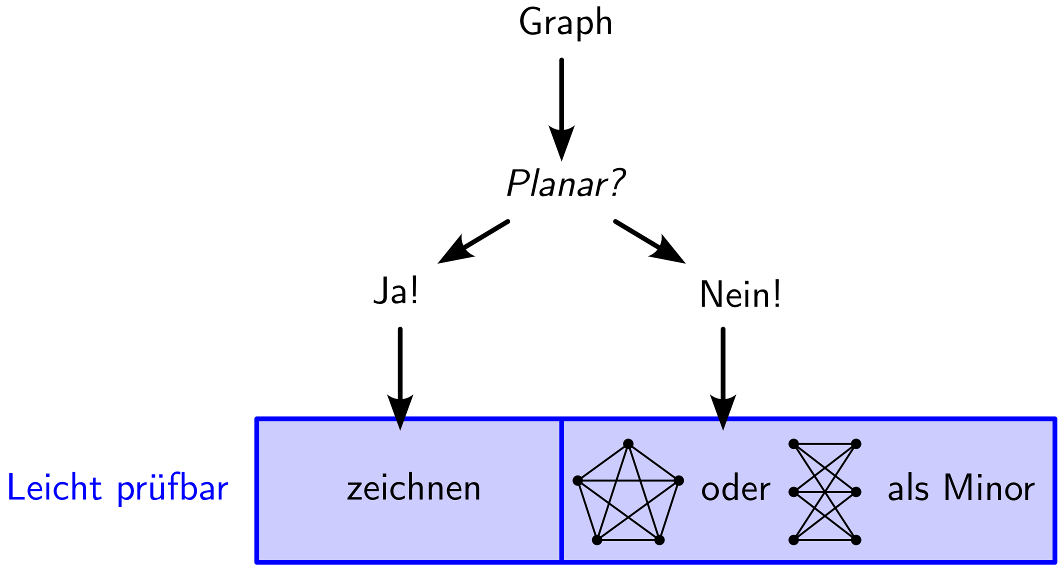
- entweder G ist planar,
- oder G enthält mindestens einen von $K_5, K_{3,3}$ als Minor.



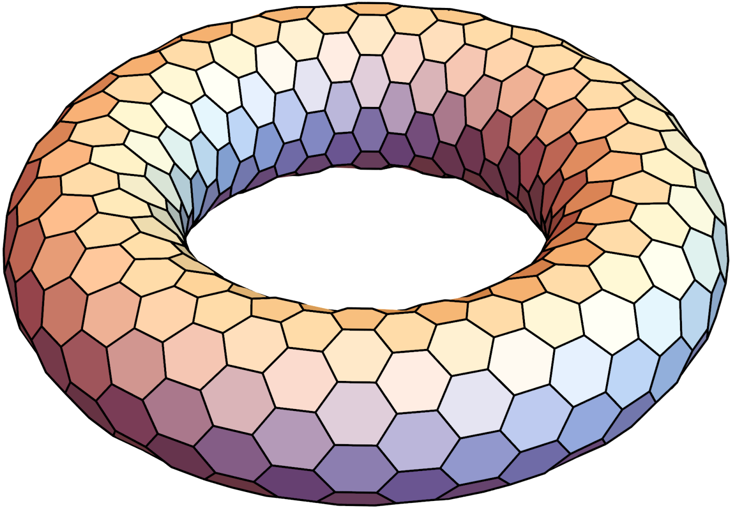
K_5



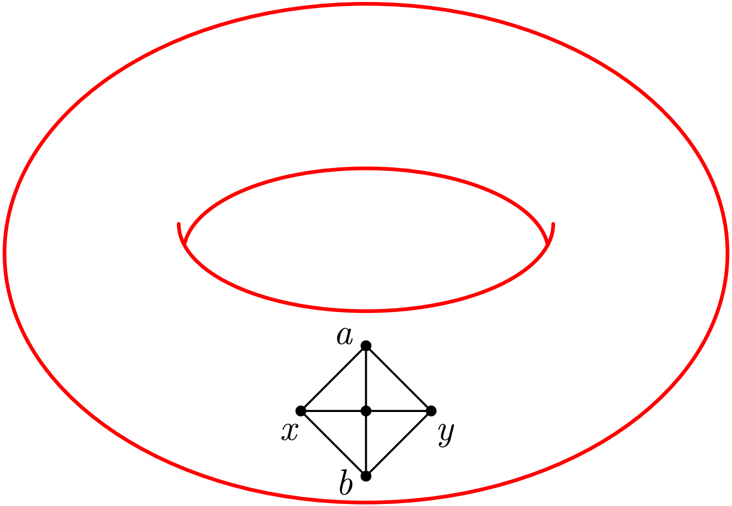
$K_{3,3}$


Graph
Planar?
Ja!
Nein!
Leicht prüfbar
zeichnen
oder
als Minor

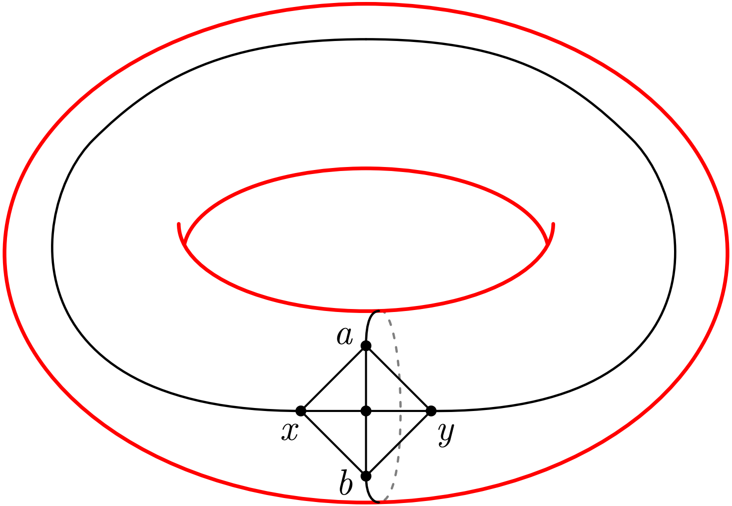
Gibt es einen Satz wie Kuratowski's für den Torus?



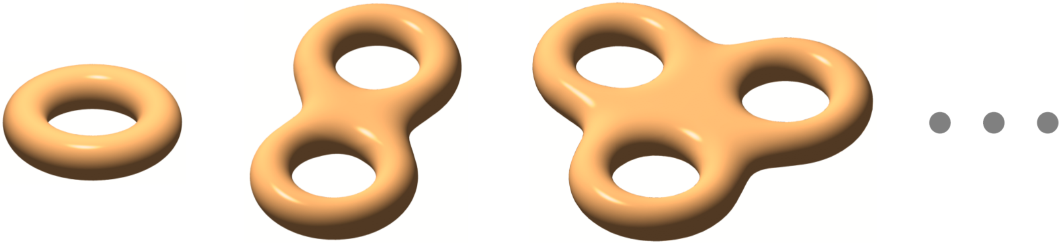
Gibt es eine kreuzungsfreie Zeichnung von K_5 auf dem Torus?



Gibt es eine kreuzungsfreie Zeichnung von K_5 auf dem Torus?



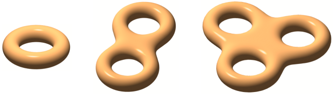
Gibt es Sätze wie Kuratowski's für andere Flächen?



Vermutung (angeblich Wagner, 1960er)

Für **jede** Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$, die abgeschlossen unter Minoren ist,

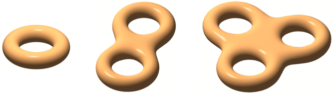
(bspw. planar sein oder eine kreuzungsfreie Zeichnung auf einer Fläche haben

 $\cdots$)

Vermutung (angeblich Wagner, 1960er)

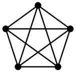
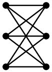
Für **jede** Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$, die abgeschlossen unter Minoren ist,

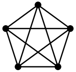
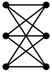
(bspw. planar sein oder eine kreuzungsfreie Zeichnung auf einer Fläche haben

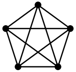
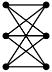
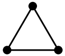
 $\cdots$)

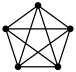
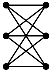
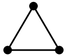
gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

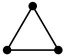
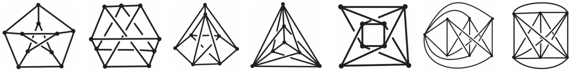
- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

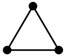
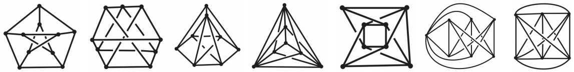
Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	 

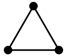
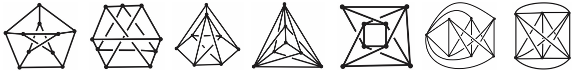
Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \dots, X_k$
planar	 
Wälder	

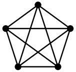
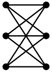
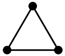
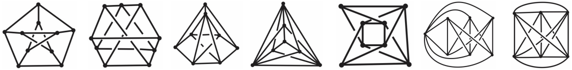
Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	 
Wälder	

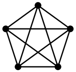
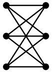
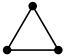
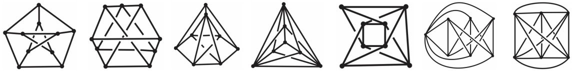
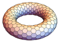
Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	 
Wälder	
linkfrei	

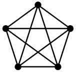
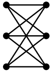
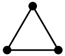
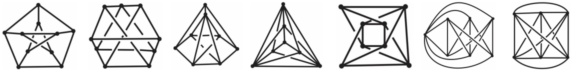
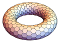
Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	
Wälder	
linkfrei	

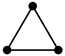
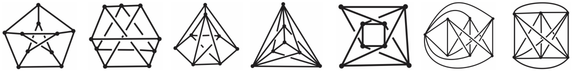
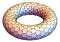
Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	
Wälder	
linkfrei	
planar nach Löschen von $\leqslant 1$ Ecke	

Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	
Wälder	
linkfrei	
planar nach Löschen von $\leqslant 1$ Ecke	???

Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	 
Wälder	
linkfrei	
planar nach Löschen von $\leqslant 1$ Ecke	$??? \geqslant 157$

Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	 
Wälder	
linkfrei	
planar nach Löschen von $\leqslant 1$ Ecke	$??? \geqslant 157$
Torus 	

Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	 
Wälder	
linkfrei	
planar nach Löschen von $\leqslant 1$ Ecke	$??? \geqslant 157$
Torus 	$???$

Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$	Minoren $X_1, \ldots, X_k$
planar	
Wälder	
linkfrei	
planar nach Löschen von $\leqslant 1$ Ecke	$??? \geqslant 157$
Torus 	$??? \geqslant 17,523$

Vermutung (angeblich Wagner, 1960er)

Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

Neil Robertson

Paul Seymour

Vermutung (angeblich Wagner, 1960er)

Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

Neil Robertson

1983–2004

Paul Seymour

Vermutung (angeblich Wagner, 1960er)

Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

Neil Robertson

1983–2004

20 Paper

Paul Seymour

Vermutung (angeblich Wagner, 1960er)

Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

Neil Robertson

1983–2004

20 Paper

$>$ **500 Seiten**

Paul Seymour

Minoren-Satz (Robertson and Seymour)

Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

Neil Robertson

1983–2004

20 Paper

$>$ **500 Seiten**

Paul Seymour

Minoren-Satz (Robertson and Seymour)

Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.

Neil Robertson

1983–2004

20 Paper

$>$ **500 Seiten**

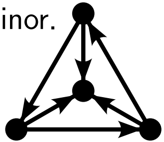
Paul Seymour

Korollar. Für jede Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft gibt es einen effizienten Algorithmus um zu prüfen, ob ein Graph die Eigenschaft hat.

Minoren-Satz (Robertson and Seymour)

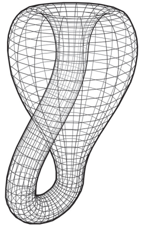
Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \ldots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \ldots, X_k$ als Minor.



Aktuelle Forschung

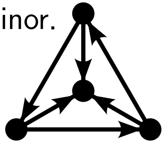
- Minoren-Satz für Matroide (Aufschreibphase)
- Minoren-Satz für gerichtete Graphen
- Gegeben eine explizite Eigenschaft $\mathcal{P}$, finde $X_1, \ldots, X_k$
- Algorithmen um $X_1, \ldots, X_k$ zu finden, gegeben $\mathcal{P}$



Minoren-Satz (Robertson and Seymour)

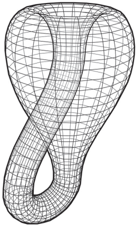
Für **jede** Minoren-abgeschlossene Graph-Eigenschaft $\mathcal{P}$ gibt es **endlich viele** Graphen $X_1, \dots, X_k$ sodass gilt:

- entweder G hat Eigenschaft $\mathcal{P}$,
- oder G enthält mindestens einen der Graphen $X_1, \dots, X_k$ als Minor.



Aktuelle Forschung

- Minoren-Satz für Matroide (Aufschreibphase)
- Minoren-Satz für gerichtete Graphen
- Gegeben eine explizite Eigenschaft $\mathcal{P}$, finde $X_1, \dots, X_k$
- Algorithmen um $X_1, \dots, X_k$ zu finden, gegeben $\mathcal{P}$



Vielen Dank :)